

**ΘΕΜΑ Α**

A1. α) ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 15

β) i) ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 35

ii) ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 35

A2. Θεώρημα σχολικό βιβλίο σελίδα 142

A3. Θεώρημα σχολικό βιβλίο σελίδα 135

A4. α) Λ σχολικό βιβλίο σελίδα 134  $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

β) Λ σχολικό βιβλίο σελίδα 70 πρέπει απλά f συνεχής

A5. γ) 4

**ΘΕΜΑ Β**

B1.  $f(x) = e^{-x} + \lambda$  σύμφωνα με τη γνωστή θεωρία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda - 2) = 0$$

$$\text{Άρα } 0 + \lambda - 2 = 0 \text{ Άρα } \lambda = 2, \quad f(x) = e^{-x} + 2$$

B2. Θεωρώ συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x$  ορισμένη στο κλειστό  $[2, 3]$

Η  $g(x)$  συνεχής στο  $[2, 3]$

$$g(2) = f(2) - 2 = e^{-2} > 0$$

$$g(3) = f(3) - 3 = e^{-3} - 1 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0$$

$$\text{Άρα } g(2) \cdot g(3) < 0$$

Οπότε ισχύει Θ. Β. για την  $g(x)$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $X_0 \in (2, 3) : g(X_0) = 0$

Ακόμα  $g'(x) = f'(x) - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0$ . Άρα η  $g$  γνησίως φθίνουσα στο  $D_g$

Άρα η λύση  $X_0$  μοναδική



**B3.** Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και παραγωγίσιμη με  $f'(x) = -e^{-x} < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  και αφού είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  έχει σύνολο τιμών το διάστημα:  $f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (2, +\infty)$

Επομένως, η  $f$  είναι συνάρτηση με την ιδιότητα  $1 - 1$ , άρα και αντιστρέψιμη.

Η  $f^{-1}$  έχει πεδίο ορισμού το  $f(\mathbb{R}) = (2, +\infty)$ .

Για να βρούμε την αντίστροφη της  $f$  θέτουμε  $y = f(x)$  και λύνουμε ως προς  $x$ . Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = y, \text{ με } y > 2$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = y - 2, y > 2$$

$$\Leftrightarrow -x = \ln(y - 2), y > 2$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln(y - 2), y > 2$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\ln(y - 2), y > 2$$

Επομένως:  $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), x > 2$

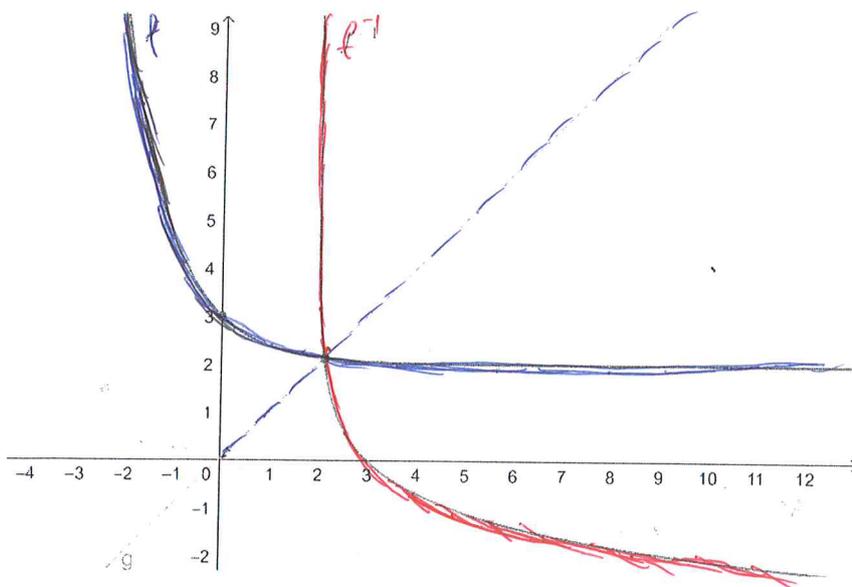
**B4.** Έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)]$

και θέτοντας  $u = x - 2$ , είναι  $u_0 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$

άρα προκύπτει:  $\lim_{u \rightarrow 0^+} [-\ln u] = +\infty$

Τελικά, η ευθεία  $x = 2$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

Για τις γραφικές παραστάσεις των  $f, f^{-1}$  προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:



(Γνωρίζουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $f^{-1}$  έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία  $y = x$ )

### Θέμα Γ

**Γ1.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$ , επομένως και στο  $x_0 = 1$

Άρα, είναι και συνεχής στο σημείο αυτό, συνεπώς έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + a)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \beta = 1 + a \Leftrightarrow \alpha = \beta \quad (1) \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - (1 + a)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - (1 + a)}{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - 1 - a}{x - 1} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$$

με χρήση του κανόνα DLH για την περίπτωση  $\frac{0}{0}$ .

Από την (1) προκύπτει:  $a = 1$ .

**Γ2.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 1)$  με  $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$  για κάθε  $x < 1$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[1, +\infty)$  με  $f'(x) = 2x > 0$  για κάθε  $x \geq 1$

Άρα η  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  συνεπώς η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και συνεχής άρα

$$\text{έχει σύνολο τιμών } f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x), \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) \right) =$$

$$= (-\infty, +\infty) = \mathbb{R},$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

### Γ3.

i) Η  $f$  έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  που περιέχει το μηδέν και είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$ , άρα, υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \mathbb{R}$ :  $f(x_0) = 0$  και  $f(0) = \frac{1}{e}$ .

$$\text{Ισχύει } \frac{1}{e} > 0 \Leftrightarrow f(0) > f(x_0) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 0 > x_0$$

ii)

$$\text{Έχουμε ότι: } f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)[f(x) - x_0] = 0 \quad (1)$$

Αλλά για κάθε  $x > x_0 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$  και  $f(x) > 0 > x_0$ . Άρα  $f(x) > 0$  και  $f(x) - x_0 > 0$  οπότε  $f(x)[f(x) - x_0] > 0$ . Άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο  $(x_0, +\infty)$ .

**Γ4.** Έστω  $M(x(t), y(t))$  η θέση του σημείου  $M$  κάθε χρονική στιγμή  $t \geq 0$  με

$x(t) \geq 1$  για κάθε  $t \geq 0$ . Ισχύει  $x(t_0) = 3$ ,  $y(t_0) = 10$ ,  $x'(t) = 2$  μον/sec για κάθε  $t \geq 0$ .

Επειδή  $M \in C_f$ , ισχύει  $y(t) = x^2(t) + 1$  για κάθε  $t \geq 0$ .

Παραγωγίζοντας παίρνουμε  $y'(t) = 2x(t)x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = 4x(t)$  για κάθε  $t \geq 0$ .

Ισχύει  $E(t) = \frac{x(t)y(t)}{2}$  για κάθε  $t \geq 0$ , αφού  $x(t), y(t) \geq 1 > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

Παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$E'(t) = \frac{1}{2} [x'(t)y(t) + y'(t)x(t)] = \frac{1}{2} [2y(t) + 4x^2(t)] = y(t) + 2x^2(t)$$

για κάθε  $t \geq 0$ .

Για  $t = t_0$  δίνει:  $E'(t_0) = y(t_0) + 2x^2(t_0) = 10 + 2 \cdot 9 = 28$  τ. μ /s.

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε:  $f(x) = (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta, x \in \mathbb{R}$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με:  $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} + \alpha$

Ισχύουν τα εξής:  $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$

Δ2. Για  $\alpha = -1, \beta = 2$ , έχουμε:  $f(x) = (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$ .

Ισχύει:  $E = \int_1^2 |f(x) - (-x + 2)| dx \quad (1)$

Για κάθε  $x \in [1, 2]$ , ισχύει:

$$f(x) - (-x + 2) = (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) = (x - 1) \cdot \ln[(x - 1)^2 + 1] \geq 0$$

Οπότε, η (1) γίνεται:

$$E = \int_1^2 [f(x) - (-x + 2)] dx = \int_1^2 (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) dx$$

Θέτουμε:  $x^2 - 2x + 2 = u$ , οπότε:  $(2x - 2)dx = du$ .

Αν  $x = 1$ , τότε  $u = 1$  και αν  $x = 2$ , τότε  $u = 2$

$$\text{και } E = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u \, du = \frac{1}{2} \int_1^2 (u \cdot \ln u - u)' \, du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln u - u]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad \tau. \mu.$$

Δ3.

i) Για  $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} - 1$  και άρα

$$f'(x) + 1 = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} = \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , γιατί  $(x-1)^2 + 1 \geq 1$  και  $\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$

Οπότε:  $f'(x) \geq -1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ii)

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1) \cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - 2 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1, \quad (1)$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$

εξασφαλίζουμε  $\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$  ώστε να ισχύει  $f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$  και άρα η (1) γράφεται

ισοδύναμα:  $f'(\xi) \geq -1$  που ισχύει από το ερώτημα Δ3 (i).

**Δ4.**

Έστω  $(\varepsilon_1)$  εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(x_1, f(x_1))$  και  $(\varepsilon_2)$  της  $C_g$  στο σημείο  $B(x_2, f(x_2))$ . Τότε:  $(\varepsilon_1): y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1) \cdot x + f(x_1) - x_1 \cdot f'(x_1)$

$(\varepsilon_2): y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2) \cdot x + g(x_2) - x_2 \cdot g'(x_2)$

Για να υπάρχει κοινή εφαπτομένη των  $C_f, C_g$  πρέπει:

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2), & (1) \\ f(x_1) - x_1 \cdot f'(x_1) = g(x_2) - x_2 \cdot g'(x_2), & (2) \end{cases}$$

Αλλά:  $f'(x_1) \geq -1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x_1 = 1$

και  $g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με την ισότητα να ισχύει μόνο  $x_2 = 0$ .

Άρα, η (1) ισχύει για  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 0$ .

Για  $x_1 = 1$  και για  $x_2 = 0$  ισχύει και η σχέση (2).

Οπότε η κοινή εφαπτομένη είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

